9

IN THEORIAM UMBRÆ MEDITATIONES MATHEMATICÆ;

QUARUM PARTEM PRIMAM,

CONSENSU AMPLISS. FACULTATIS PHILOSOPH. AD IMPERIALEM ACAD. ABOËNSEM,

PRÆSIDE

Mag. NATH. G. AF SCHULTÉN,
Mathematum Professore Publ. & Ord.,
Acad. Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Membro Corresp.,

PRO GRADU PHILOSOPHICO

PUBLICÆ CENSURÆ MODESTE SUBJICIT

CLAUDIUS ALBERTUS TULINDBERG,
Ostrobotniensis,

In Audit. Philos. die XIII Decembr. MDCCCXXVI. horis a. m. solitis.

ABOÆ, Typis FRENCKELLIANIS.

§. I.

Phænomenon Opticum, nomine *Umbræ* vulgo insignitum, in eo consistere notum est, quod in medio quodam illuminato spatia obveniant radiis luminis non collustrata, interposito scilicet Objectum lucidum inter atque spatia ista corpore quodam opaco. Plerumque vero non subito ad illustrata spatia ab obscuris fit transitus. Intervallum nempe observamus in vicinia illorum clarescens, in vicinia horum nigrescens; quod quidem numquam non accidere videmus, cum Objectum lucidum apparente fulget Diametro. Neque difficilis est hæc res explicatu. Intelligimus scilicet aliquas spatii absoluti partes, quas ex uno Objecti lucidi limbo emanantes radii assequi non possunt, collustrari tamen posse iis, qui ab altero ejusdem limbo exeunt. Intervallum hocce *Penumbræ* nomine vulgo venit. Allatas nuper tam *Umbræ* quam *Penumbræ* notiones ad quæstiones Mathematicas duplicis indolis ansam facile præbere in aprico est. Posito scilicet, quod ab Objecto impediente data quædam superficies obumbretur, in naturam linearum hac in superficie *Umbram* atque *Penumbram* determinantium inquiri potest, nec non quantitas etiam ipsa luminis diversa *Penumbræ* puncta collustrantis investiganda se offerre.

§. II.

Problematum horum universalium prius, generalissime conceptum, enuntiari ita potest.

Si ab Objecto lucido, datæ formæ, emanans Lumen Impedimentum offendat datæ quoque figuræ, Superficiesque data sic infuscetur, æquationes invenire linearum Umbram atque Penumbram in data ista superficie definientium.

Cum lineæ istæ quæsitæ, quas brevitatis ergo *Umbræ* atque *Penumbræ* nomine in sequentibus insigniemus, non nisi limites sint partium superficiei datæ nullam lucem recipientium omninoque illuminatarum, cumque manifestum etiam sit, planum quodcumque Objectum lucidum & Impedimentum simul contingens, pro positione sua particulari, limitem haberi partium spatii absoluti nullum aut omne lumen ab Objecto isto emanans excipientium; concludendum facile est, superficiem, cujus intersectione cum obumbrata ista memoratæ jam lineæ *Umbræ* atque *Penumbræ* ortum ducunt, eam necessario habendam esse, quam citatum nuperrime planum continuis generare censendum sit sui ipsius intersectionibus, quando scilicet positionem suam quomodocumque mutare illud supponitur, ea tamen conditione, ut Objectum lucidum Impedimentumque semper simul contingat. Cum ex ipsa hujusce superficiei generatione pateat, isthanc earum esse generis, quas *in planum explicabiles* (développables) Geometræ appellant, ad generalem sic eam pervenimus conclusionem, Lineas *Umbræ* atque *Penumbræ* nihil aliud revera habendas esse, quam *Intersectiones obumbratæ Superficiei cum diversis ramis Superficiei in planum explicabilis Objectum lucidum Impedimentumque simul contingentis.*

Ex eodem hocce principio materiem quæ jam agitur a Mathematicis jamdudum tractatam deprehendimus, a *Monge* scilicet in *Mémoires des Savans Étrangers* T. IX postque

que eum a *Lacroix* in fine Tomi 1:mi operis sui: *Traité du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral.* Horum vero Geometrarum celeberrimorum hoc in argumentum disquisitiones superficiem in planum explicabilem solam, ipsas autem non lineas *Umbræ* atque *Penumbræ*, spectant, breviterque etiam nimium propositæ nobis eæ videntur hincque eo carentes systemate, quo præsenti Scientiæ statui convenienter tractanda hæc est materia. — Leves hosce defectus pro modulo virium tollere, in sequentibus, quas benigno Lectoris judicio modeste subjicimus, pagellis, propositum nobis primum erit.

§. III.

In applicando ad casus speciales principio supra exposito generali, primum quidem eos a se invicem dignovisse juvabit, qui ab Objecti lucidi atque Impedimenti diversa indole pendent.

Hypotheses sic particulares sequentes se offerunt:

I:mo Objectum *Punctum*, cum
- a) Impedimento *Linea*
- b) Impedimento *Superficie.*

II:do Objectum *Linea*, cum
- a) Impedimento *Linea*
- b) Impedimento *Superficie.*

III:tio Objectum *Superficies*, cum
- a) Impedimento *Linea*
- b) Impedimento *Superficie.*

Antequam vero ad singulos hosce sex casus contemplandos progredimur, apprime commodum videtur, primum, utpote principia illorum tractandorum generalia, speciales exhibuisse illas æquationes, quas Objecti atque Impedimenti particularis secum fert natura, quarumque inter se combinationes, pro quovis casuum propositorum, sponte dein innotescent.

Habeat hunc in finem *Objectum lucidum*, quatenus *Punctum* consideratum, coordinatas

$$a, b, c;$$

quatenus *Linea*, æquationes

$$\left.\begin{array}{l} y = fx \\ z = \varphi x \end{array}\right\};$$

atque, quatenus *Superficies*, æquationem

$$z = f(x, y).$$

Habeat porro *Impedimentum*, quatenus *Linea*, æquationes

$$\left.\begin{array}{l} y' = \mathrm{g}x' \\ z' = \gamma x' \end{array}\right\};$$

&, quatenus *Superficies*, æquationem

$$z' = \mathrm{g}(x', y').$$

Superficiei Obumbratæ æquatio sit

$$z'' = \mathrm{F}(x'', y'').$$

Planum, Objectum lucidum & Impedimentum semper simul contingens, sicque explicabilem illam generans superficiem, æquatione tandem definiatur

$$Z = pX + qY + r.$$

Brevitatis quoque caussa ponatur:

$$\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x} = f'x, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi x}{\mathrm{d}x} = \varphi' x, \qquad \frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}x} = f'(x, y),$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}y} = f_{,}(x, y), \qquad \frac{\mathrm{dg}x'}{\mathrm{d}x'} = \mathrm{g}'x', \qquad \frac{\mathrm{d}\gamma x'}{\mathrm{d}x'} = \gamma' x',$$

$$\frac{\mathrm{dg}(x', y')}{\mathrm{d}x'} = \mathrm{g}'(x', y'), \qquad \frac{\mathrm{dg}(x', y')}{\mathrm{d}y'} = \mathrm{g}_{,}(x', y').$$

Quia

Quia omnes jam sex casus in eo conveniunt, quod in datam superficiem, plano generanti obviam, umbra numquam non projiciatur, primum singulis eorum communes habemus æquationes:

$$z'' = F(x'', y'') \quad \ldots \quad 1),$$
$$z'' = px'' + qy'' + r \quad \ldots \quad 2).$$

Cum porro ipsæ p, q, r, quæ in genere Constantes designant plani quod agitur data in positione, functiones necessario habendæ sint variabilis cujusdam positionem istam particulariter determinantis, e. c. unius coordinatarum puncti contactus plani atque Impedimenti, v. g. ipsius x'; e nota Superficiem continuis generatam intersectionibus alius dati generis determinandi methodo, manifestum omnino est, superficiem, cujus determinatio jam agitur, explicabilem, cujusque generatrix ipsum planum est mobile, definitum iri instituta eliminatione parametri ipsius x' æquationem inter (2) ejusdemque Differentialem primi ordinis, parametro tantum ut variabili assumpta. Communem hinc singulis casibus obtinemus adhuc æquationem:

$$o = x'' \frac{dp}{dx'} + y'' \frac{dq}{dx'} + \frac{dr}{dx'} \quad \ldots \quad 3).$$

Ceteræ, quæ in casu quovis speciali adjiciendæ sunt æquationes, ab Objecti & Impedimenti diversa natura pendent sequentesque habentur:

Cum Objectum lucidum uti *Punctum* consideratur, planum superficiem explicabilem generans id semper transibit, unde hoc in casu æquatio prodibit:

$$c = pa + qb + r. \quad \ldots \quad 4).$$

Cum

Cum Objectum autem data in spatio *Linea* ponitur, primum habebimus æquationes

$$y = fx \quad . \; . \; . \quad 5),$$
$$z = \varphi x \quad . \; . \; . \quad 6).$$

Hisque duæ adhuc accedunt, ista ex consideratione, quod Objecto planum quod agitur occurrere debeat, istaque quod occursum huncce contingendo fieri oporteat.

Præbet illa æquationem

$$z = px + qy + r \quad . \; . \; . \quad 7);$$

hæc, vi notæ theoriæ Contactus Linearum in spatio Superficierumque, æquationem

$$\varphi' x = p + qf' x \quad . \; . \; . \quad 8).$$

Objectum lucidum tertio utpote data *Superficies* considerandum est, quo in casu primum æquationem habebimus

$$z = f(x, y) \quad . \; . \; . \quad 9);$$

huicque, considerationibus adhibitis nuper plane similibus, ulterius accedentes

$$z = px + qy + r \quad . \; . \; . \quad 10),$$
$$p = f'(x, y) \quad . \; . \; . \quad 11),$$
$$q = f_{\prime}(x, y) \quad . \; . \; . \quad 12).$$

Impedimentum demum aut *Linea* statui potest aut *Superficies*

Illo in casu, ut nuperrime respectu Objecti lucidi observatum est, præter datas

$$y' = gx' \quad . \; . \; . \quad 13),$$
$$z' = \gamma x' \quad . \; . \; . \quad 14);$$

obtine-

obtinebuntur adhuc:

$$z' = px' + qy' + r \quad . \; . \; . \quad 15),$$
$$\gamma' x' = p + qg' x' \quad . \; . \; . \quad 16).$$

In *hoc*, præter datam

$$z' = g\,(x', y') \quad . \; . \; . \quad 17),$$

ipsæ

$$z' = px' + qy' + r \quad . \; . \; . \quad 18),$$
$$p = g'(x', y') \quad . \; . \; . \quad 19),$$
$$q = g_{,}(x', y') \quad . \; . \; . \quad 20).$$

§. IV.

Cum, per allata hactenus, datæ in genere habeantur æquationes *cardinales* cuique convenientes hypothesi respectu Objecti lucidi atque Impedimenti assumptæ, tractatio universalis singulorum qui aguntur sex casuum in debita tantummodo consistit harum æquationum combinatione nullisque obnoxia est difficultatibus. Sufficiat igitur nobis, pro quolibet eorum ipsa tantum indicasse resultata, quæ sequentia sunt.

In casu I, a habemus

1), 2), 3), 4), 13), 14), 15), 16);

quæ æquationes sunt numero octo novem inter quantitates

$$p,\; q,\; r,\; x',\; y',\; z',\; x'',\; y'',\; z'',$$

e quibus eliminari possunt ipsæ

$$p,\; q,\; r,\; x',\; y',\; z',$$

sicque restabunt duæ æquationes inter

$$x'',\; y'',\; z'',$$

quibus lineæ *Umbræ* atque *Penumbræ* definientur.

In

In casu I, b habebimus

1), 2), 3), 4), 17), 18), 19), 20);

itidem octo æquationes easdem inter memoratas novem quantitetes.

Pro casu II, a valebunt

1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 13), 14), 15), 16);

quæ undecim sunt æquationes duodecim inter

$$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ x'',\ y'',\ z'',$$

unde eliminatione facta ipsarum

$$p,\ q,\ r,\ x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',$$

duas etiam tandem obtinebimus æquationes inter

$$x'',\ y'',\ z''.$$

In casu II, b citandæ sunt

1), 2), 3), 4), 5), 6), 7), 8), 17) 18), 19) 20);

itidem undecim duodecim inter easdem quantitates

In casu III, a

1), 2), 3), 9), 10), 11), 12), 13), 14), 15), 16);

& denique:

In casu III, b

1), 2), 3), 9), 10), 11), 12), 17), 18), 19), 20).